

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală, județul Timiș**  
**7.02.2025**

**clasa a VI-a**

BAREM

1 a) Se consideră 2025 de numere naturale consecutive, primul și ultimul fiind invers proporționale cu 0,(3) și respectiv 0,1(6). Notăm cu S suma acestor 2025 de numere. a) Arătați că numărul divizorilor numărului S este un cub perfect.

b) Determinați numerele naturale nenule a, b, c, astfel încât :  $\frac{a}{a+b} = \frac{2b}{b+2} = \frac{a+c}{c+3}$ .

a) Not primul nr cu a.

$$(a, a + 2024) \rightarrow (0, (3); 0,1(6))$$

$$\frac{a}{3} = \frac{a+2024}{6} \Rightarrow a = 2024 \quad \dots\dots\dots 1p$$

Cele 2025 de numere sunt: 2024,2025,...,4048 .....1p

$$S = 2024 + 2025 + \dots + 4048$$

$$S = 6147900 ; S = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23 \quad \dots\dots\dots 1p$$

Numărul divizorilor numărului S este  $216 = 6^3$  .....1p

$$b) a, b \in N^* \Rightarrow a < a + b \Rightarrow \frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{2b}{b+2} < 1 \Rightarrow 2b < b + 2$$

$$b < 2, b \in N^* \Rightarrow b = 1 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{2b}{b+2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{a+1} = \frac{2}{3}$$

$$a = 2 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{a+c-1}{c+2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1+c}{c+2} = \frac{2}{3} \Rightarrow c = 1$$

$$a = 2, b = 1, c = 1 \quad \dots\dots\dots 1p$$

2. a) Aflați două numere naturale, știind că au produsul 2025, iar raportul dintre cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al lor este 0,(1).

b) Determinați numerele naturale nenule a și b,  $a < b$  pentru care are loc relația:  $3 \cdot [a, b] + 5 \cdot (a, b) = 123$ , unde  $[a, b] = c.m.m.c$  al numerelor a și b iar  $(a, b) = c.m.m.d.c$  al numerelor a și b

$$a) a \cdot b = 2025, \frac{(a,b)}{[a,b]} = 0,(1)$$

$$9 \cdot (a, b) = [a, b] ; (a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b = 2025$$

$$9 \cdot (a, b)^2 = 2025 ; (a, b) = 15 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 15 \cdot x ; b = 15 \cdot y \text{ și } (x, y) = 1$$

$$\begin{aligned}
 a \cdot b = 2025 &\Rightarrow x \cdot y = 9 && \dots\dots\dots 1p \\
 x = 1, y = 9 &\Rightarrow a = 15, b = 135 \\
 x = 9, y = 1 &\Rightarrow a = 135, b = 15 \\
 (a, b) \in \{(15, 135), (135, 15)\} &&& \dots\dots\dots 1p
 \end{aligned}$$

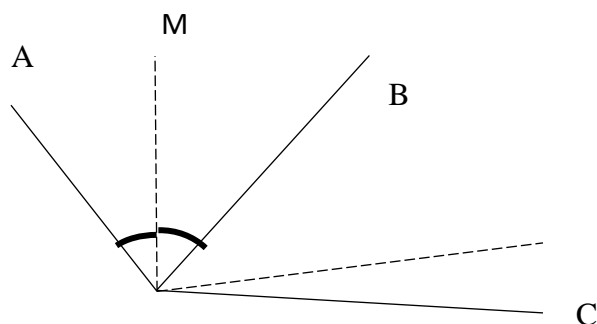
b)  $3 \cdot [a, b] + 5 \cdot (a, b) = 123$   
 $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b \Rightarrow \frac{a \cdot b}{(a, b)} = [a, b]$   
 Not  $(a, b) = d \Rightarrow d \mid a \text{ și } d \mid b \Rightarrow \exists x \in N^* \text{ a.î } a = dx \text{ și } d \mid b$   
 $\Rightarrow \exists y \in N^* \text{ a.î } b = dy \text{ cu } (x, y) = 1$   
 $3 \cdot [a, b] + 5 \cdot (a, b) = 123 \Rightarrow \frac{3 \cdot dx \cdot dy}{d} + 5d = 123 \dots\dots\dots 1p$   
 $\Rightarrow 3dxy + 5d = 123$   
 $3 \mid 3dxy, 3 \mid 123 \Rightarrow 3 \mid 5d \Rightarrow 3 \mid d \Rightarrow d = 3k, \text{ unde } k \in N^*$   
 $\Rightarrow 9kxy + 15k = 123 \Rightarrow k \cdot (3xy + 5) = 41$   
 $\Rightarrow k \in \{1, 41\} \dots\dots\dots 1p$   
 $k = 41 \text{ imposibil } \Rightarrow k = 1, d = 3 \text{ și } 3xy + 5 = 41$   
 $\Rightarrow xy = 12 \dots\dots\dots 1p$   
 $(x, y) = 1 \Rightarrow x = 1, y = 12; x = 3, y = 4;$   
 $(a, b) \in \{(3, 36), (9, 12)\} \dots\dots\dots 1p$

3. Se dau unghiurile adiacente  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle BOC$ , astfel încât bisectoarele lor, semidreptele  $(OM$  respectiv  $(ON$  formează un unghi cu măsura de  $75^\circ$  și  $3 \cdot \sphericalangle BOC = 2 \cdot \sphericalangle AOB$ .

- a) Determinați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle AON$   
 b) Dacă  $(OM \perp (OT$ , astfel încât  $M$  și  $T$  sunt de aceeași parte cu  $B$  față de  $OA$ , demonstrați ca semidreapta  $(OT$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle CON$ .

a)  
 $(OM \text{ bis } \sphericalangle AOB \Rightarrow \sphericalangle AOM = \sphericalangle MOB = x$   
 $(ON \text{ bis } \sphericalangle BOC \Rightarrow \sphericalangle BON = \sphericalangle NOC = y$   
 $x + y = 75^\circ, 6y = 4x \dots\dots\dots 1p$   
 $x = 45^\circ, y = 30^\circ$   
 $\sphericalangle AOB = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$   
 $\sphericalangle AON = 120^\circ \dots\dots\dots 1p$

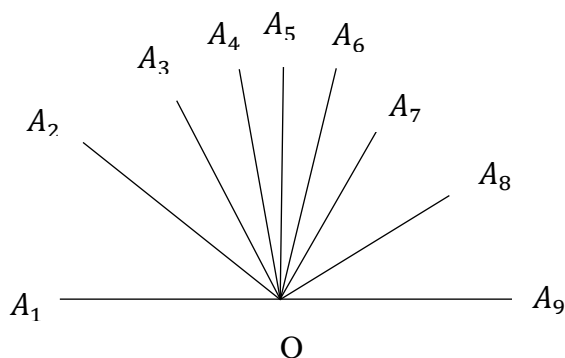
b)  $(OM \perp (OT \Rightarrow \sphericalangle MOT = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$   
 $\sphericalangle NOT = \sphericalangle MOT - \sphericalangle MON = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ \dots\dots\dots 1p$   
 $\sphericalangle CON = y = 30^\circ$   
 $\sphericalangle TOC = \sphericalangle NOC - \sphericalangle NOT = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ \dots\dots\dots 1p$   
 $\sphericalangle TOC = \sphericalangle NOT \Rightarrow (OT \text{ este bisectoarea unghiului } \sphericalangle CON \dots\dots\dots 1p$



4. Fie unghiurile  $\angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \angle A_3OA_4, \dots, \angle A_8OA_9$  care au interioarele disjuncte iar  $\angle A_1OA_9$  este alungit. Dacă  $\angle A_1OA_2 = p_1^\circ, \angle A_2OA_3 = p_2^\circ, \angle A_3OA_4 = p_3^\circ, \dots, \angle A_8OA_9 = p_8^\circ$ , unde  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_8$  sunt numere prime distincte de două cifre și  $p_1 > p_8 > p_7 > p_2 > p_3 > p_6 > p_5 > p_4$ , atunci arătați că :

a)  $OA_5 \perp OA_1$

b) ( $OA_5$  este bisectoarea unghiului  $\angle A_3OA_7$ )



Deoarece  $11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 = 180$  .....1p

$p_1 > p_8 > p_7 > p_2 > p_3 > p_6 > p_5 > p_4$

$\Rightarrow p_1 = 37, p_8 = 31, p_7 = 29, p_2 = 23, p_3 = 19, p_6 = 17, p_5 = 13$  și  $p_4 = 11^\circ$ . .....1p

a)  $\angle A_1OA_5 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 37^\circ + 23^\circ + 19^\circ + 11^\circ = 90^\circ$  .....1p

$\Rightarrow A_5 \perp OA_1$ . ... .....1p

b)  $\angle A_3OA_5 = \angle A_3OA_4 + \angle A_4OA_5 = p_3 + p_4 = 19^\circ + 11^\circ = 30^\circ$  ...1p

$\angle A_5OA_7 = \angle A_5OA_6 + \angle A_6OA_7 = p_5 + p_6 = 13^\circ + 17^\circ = 30^\circ$  ....1p

$\angle A_3OA_5 = \angle A_5OA_7 \Rightarrow (OA_5 \text{ este bisectoarea unghiului } \angle A_3OA_7)$  ....1p